به نام خدا

- طراحی گیرنده ی بهینه در حضور نویز جمع شونده

قانون تصمیم گیری گیرنده ی بهینه

$$\hat{m} = \underset{m}{\mathrm{Arg\ Max}}\; P_r\{\underline{S}_m \mid \underline{r}\}$$

$$\hat{m} = \underset{m}{\mathrm{Arg\ Max}}\; P(\underline{r} \mid \underline{S}_m)\,\overbrace{P(\underline{S}_m)}^{P_m}$$

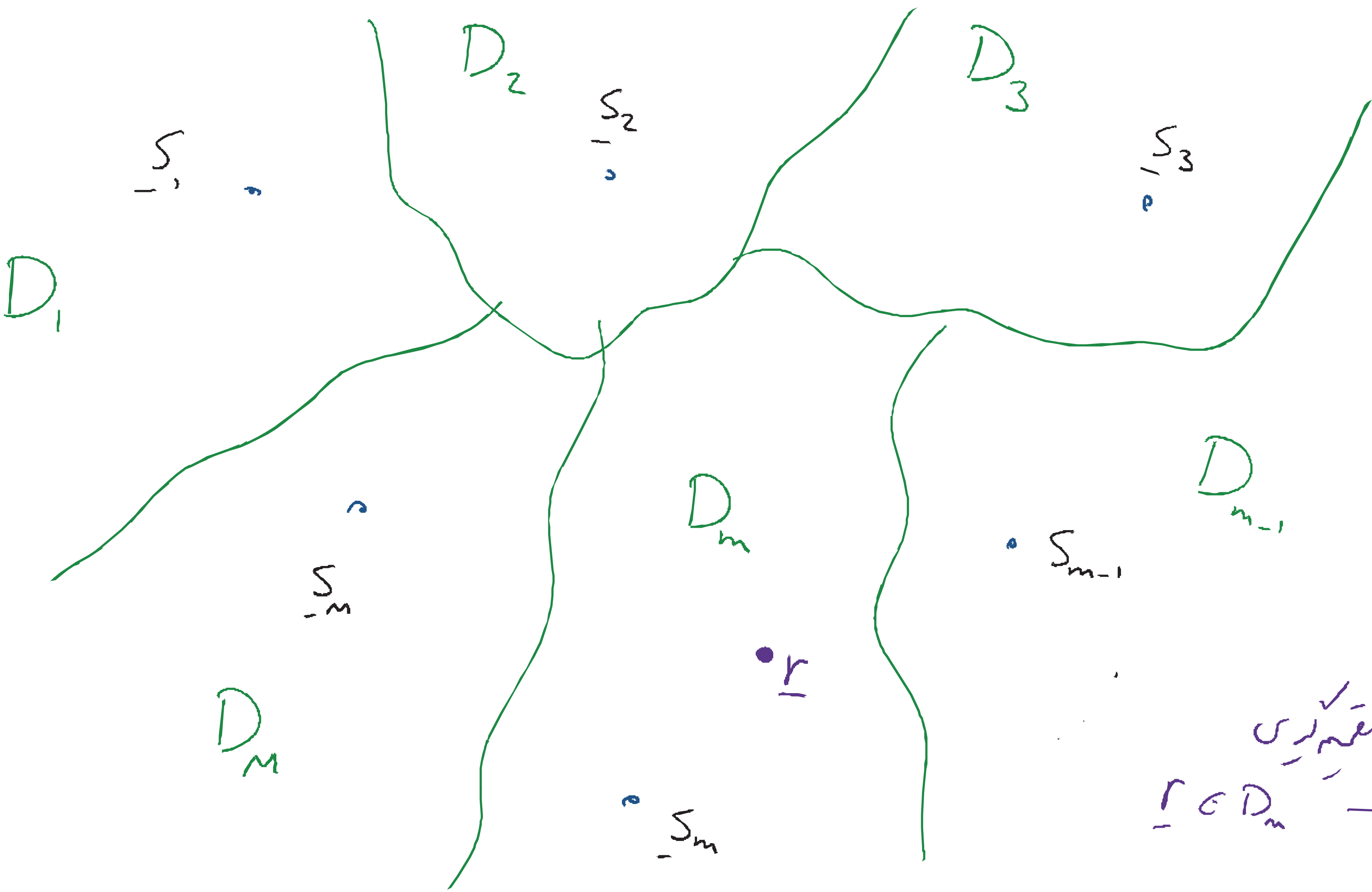
ساده سازی و حذف قسمت های مشترک

$$\hat{m} = \underset{m}{\mathrm{Arg\ Max}}\; P_m\, P(\underline{r} \mid \underline{S}_m)$$

بنابراین گیرنده‌ی بهینه عبارت $P_m P(\underline{r}|s_m)$ را به ازای $m=1,2,\dots,M$ بیشینه می‌کند. اندیسی که بیشترین مقدار را به دست می‌دهد، به عنوان سیگنال ارسالی بازیابی می‌کند.

به عبارت دقیق‌تر، گیرنده براساس $P_m P(\underline{r}|s_m)$، فضای سیگنال را به نواحی تصمیم‌گیری D_m تقسیم‌بندی می‌کند. اگر بردار دریافتی $\underline{r}$ در ناحیه‌ی D_m قرار بگیرد، گیرنده اندیس m را به عنوان سیگنال ارسالی بازیابی می‌کند

$$D_m = \left\{ \underline{r} \in \mathbb{R}^N \;;\; P_m P(\underline{r}|s_m) > P_{m'} P(\underline{r}|s_{m'}) \quad \forall m' \neq m,\ m'=1,2,\dots,M \right\}$$



قانون تصمیم‌گیری

$\underline{r} \in D_m \longrightarrow$ اندیس m ارسال شده است

یا سیگنال ارسال شده است.

* اگر سیگنال‌های $\{s_m(t)\}_{m=1}^{M}$ هم‌احتمال باشند یعنی $P(\underline{s}_1) = P(\underline{s}_2) = \cdots = P(\underline{s}_M) = \frac{1}{M}$

به عبارت دیگر احتمال ارسال سیگنال‌های $\{s_m(t)\}_{m=1}^{M}$ یکسان باشد، در این صورت قانون تصمیم‌گیری

به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{m} = \operatorname*{Arg\,Max}_{m} \; P_m \, p(\underline{r}|\underline{s}_m) = \operatorname{Arg\,Max} \; p(\underline{r}|\underline{s}_m)$$

$P_1 = P_2 = \cdots = P_M = \frac{1}{M}$ در ماکزیمم‌سازی تأثیر ندارند

به تابع $p(\underline{r}|\underline{s}_m)$ یا هر تابع monotone از آن، تابع شباهت یا likelihood گفته

می‌شود.

بنابراین گیرنده‌ی بهینه در این حالت، گیرنده‌ای است که تابع شباهت را ماکزیمم می‌کند. از این جهت به آن گیرنده ML یا (Maximum likelihood) یا گیرنده‌ی بیشترین شباهت گفته می‌شود.

→ در حالتی که سیگنال‌های ارسالی هم‌احتمال باشند، گیرنده‌ی MAP مشابه گیرنده‌ی ML عمل می‌کند.

در ادامه می‌خواهیم ساختار گیرنده‌ی بهینه را برای نویز جمع‌شونده‌ی سفید گوسی AWGN

Additive White Gaussian Noise

استخراج کنیم.

قانون تصمیم‌گیری گیرنده‌ی بهینه

$$\hat{m} = \operatorname{Arg\,Max}\ P_m\, p(\underline{r}\,|\,\underline{S}_m)$$

در اولین مرحله، محاسبه‌ی تابع چگالی احتمال $p(\underline{r}\,|\,\underline{S}_m)$ است. می‌دانیم

$$\underline{r} = \underline{S}_m + \underline{n} \quad \text{یا} \quad r_k = S_{m_k} + n_k$$

$$E\{n_k\} = 0, \quad Var\{n_k\} = \frac{N_0}{2}, \quad E\{n_k n_\ell\} = \frac{N_0}{2}\delta_{k\ell}$$

$$\xrightarrow{\text{اگر } n \text{ گوسی}} \quad \underline{n} \sim N\left(\underline{0}, \frac{N_0}{2} I\right)$$

بردار $\underline{n}$ نویز یک بردار گوسی است و با مشخص بودن بردار میانگین و ماتریس کواریانس به صورت کامل آماری مشخص است

یا به عبارت دیگر $n_k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right) \quad , \quad k=1,2,\dots,N$

علاوه بر این با توجه به اینکه $\{n_k\}_{k=1}^{N}$ که متعامد و ناهمبسته هستند از گوسی بودن نمونه‌ها نیز می‌توان نتیجه گیری کرد. نمونه‌های نویز مستقل نیز هستند

$\{n_k\}_{k=1}^{N}$: iid (independent identical distribution)

$$\underline{r} = \underline{S}_m + \underline{n} \quad ; \quad r_k = S_{m_k} + n_k \longrightarrow P(r_k \mid S_{m_k}) = P_n(r_k - S_{m_k})$$

n_k گوسی است

$$\Longrightarrow P(r_k \mid S_{m_k}) = \mathcal{N}\left(S_{m_k}, \frac{N_0}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r_k - S_{m_k})^2}{N_0}\right)$$

$$\xRightarrow[\text{نویزها}]{\text{استقلال}} P(\underline{r} \mid \underline{S}_m) = \prod_{k=1}^{N} P(r_k \mid S_{m_k})$$

* راه دیگر، نوشتن تابع چگالی احتمال بردار تصادفی گوسی $\underline{n}$ است.

$$\underline{r} = \underline{S}_m + \underline{n} \quad , \quad \underline{n} = N\left(\underline{0}, \frac{N_0}{2} I\right)$$

$$\xRightarrow[\underline{S}_m \text{ بودن}]{\text{به شرط معلوم}} \underline{r} \sim N\left(\underline{S}_m, \frac{N_0}{2} I\right)$$

یادآوری

$$\underline{X} \sim N(\underline{m}_x, C_x) \longrightarrow f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |C_x|}} \exp\left(-\frac{(\underline{x}-\underline{m}_x)^T C_x^{-1} (\underline{x}-\underline{m}_x)}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow P(\underline{r} \mid \underline{S}_m) = N\left(\underline{S}_m, \frac{N_0}{2} I\right)$$

$$\Longrightarrow \quad p(\underline{r} \mid \underline{S}_m) = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} \exp\left(-\frac{\|\underline{r}-\underline{S}_m\|^2}{N_0}\right)$$

قانون تصمیم گیری به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{m} = \operatorname{Arg\,Max} \; P_m \, p(\underline{r} \mid \underline{S}_m)$$

$$= \operatorname{Arg\,Max} \; P_m \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)^N}} \exp\left(-\frac{\|\underline{r}-\underline{S}_m\|^2}{N_0}\right)$$

$$= \operatorname{Arg\,Max} \; P_m \exp\left(-\frac{\|\underline{r}-\underline{S}_m\|^2}{N_0}\right)$$

حذف جزء های
مشترک بی تاثیر روی
ماکزیمم سازی

تابع لگاریتم

$\Longrightarrow$

تابع صعودی است

$$\hat{m} = \operatorname{ArgMax} \ \ln\left(P_m \exp\left(-\frac{\|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2}{N_0}\right)\right)$$

$$\hat{m} = \operatorname{ArgMax} \left\{ \ln P_m - \frac{\|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2}{N_0} \right\}$$

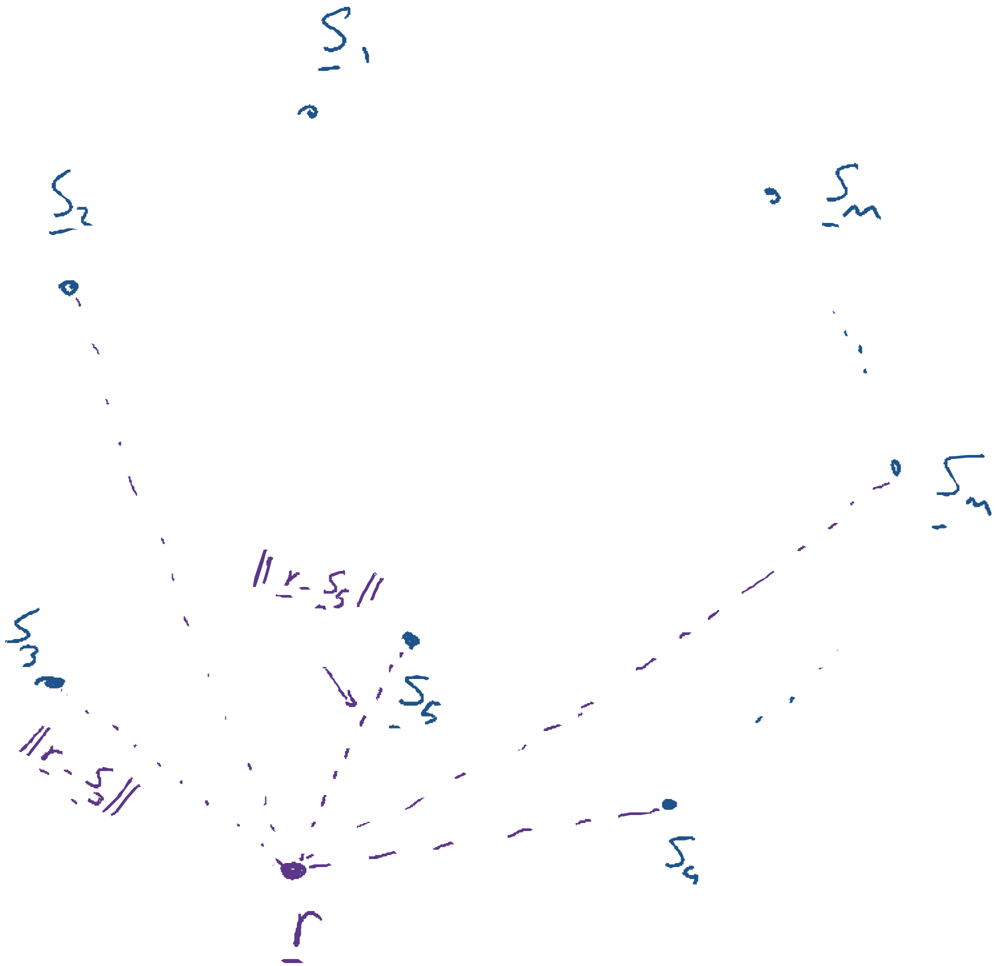
$$= \operatorname{ArgMin} \underbrace{\left\{ \|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2 - N_0 \ln P_m \right\}}_{DM(\underline{r},\, \underline{s}_m)} \qquad \text{Distance Metric}$$

ضرب کردن در $-N_0$

* گیرنده‌ی بهینه، گیرنده‌ای است که متریکِ فاصله $DM(\underline{r}, \underline{s}_m)$ را مینیمم می‌کند

* در حالتی که سیگنال‌های ارسالی هم‌احتمال باشند $P_1 = P_2 = \cdots = P_M = \frac{1}{M}$ ، عبارت $N_0 \ln P_m$ در مینیمم‌سازی بی‌تأثیر است و متریکِ فاصله معادل فاصله‌ی اقلیدسی بردار $\underline{r}$ از بردار $\underline{s}_m$ خواهد بود $DM(\underline{r}, \underline{s}_m) = \|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2$

در این حالت، گیرنده‌ی بهینه، سیگنالی را به عنوان سیگنال ارسالی بازیابی می‌کند که کمترین فاصله‌ی اقلیدسی را با بردار $\underline{r}$ داشته باشد.



* نواحی تصمیم‌گیری براساس فاصله اقلیدسی تعیین می‌شود.

* سیگنالی به عنوان سیگنال ارسالی بازیابی می‌شود که نزدیک‌ترین سیگنال به بردار دریافتی $\underline{r}$ باشد (کمترین فاصله‌ی اقلیدسی)

به منظور پیدا کردن ساختار قابل پیاده سازی گیرنده‌ی بهینه، قانون تصمیم گیری را باز هم ساده‌تر می‌کنیم.

$$\hat{m} = \text{Arg Max } P_m \, P(\underline{r} \mid \underline{s}_m)$$

$$= \text{Arg Min } \left\{ \|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2 - N_0 \ln P_m \right\} = \text{Arg Min } D_m(\underline{r}, \underline{s}_m)$$

$$= \text{Arg Min } \left\{ \underbrace{\|\underline{r}\|^2}_{\text{به } s_m \text{ بستگی ندارد}} + \underbrace{\|\underline{s}_m\|^2}_{\text{انرژی سیگنال } \underline{s}_m = E_m} - 2\underbrace{Re\left\{\langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle\right\}}_{\substack{\text{همبستگی دو سیگنال } \underline{r} \text{ و } \underline{s}_m \\ (r(t),\, s_m(t))}} - N_0 \ln P_m \right\}$$

$$\|\underline{r} - \underline{s}_m\|^2 = \langle \underline{r} - \underline{s}_m, \underline{r} - \underline{s}_m \rangle$$

$$= (\underline{r} - \underline{s}_m) \cdot (\underline{r} - \underline{s}_m)^*$$

حذف جمله‌های بی تاثیر $\Longrightarrow$ در بهینه سازی و ضرب $-\frac{1}{2}$ در

$$\hat{m} = \operatorname{Arg\,Max} \underbrace{\left\{ \mathrm{Re}\left\{ \langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle \right\} + \overbrace{\frac{N_0}{2} \ln P_m - \frac{E_m}{2}}^{\beta_m} \right\}}_{CM(\underline{r},\, \underline{s}_m)}$$

$CM(\underline{r}, \underline{s}_m)$: Correlation Metric

* گیرنده‌ی بهینه، گیرنده‌ای است که با دریافت $\underline{r}$، $\underline{s}_m$ ای را به عنوان سیگنال ارسالی بازیابی می‌کند که ضریب همبستگی $CM(\underline{r}, \underline{s}_m)$ برای آن ماکزیمم مقدار باشد.

$$CM(\underline{r}, \underline{s}_m) = \mathrm{Re}\left\{ \langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle \right\} + \beta_m$$

* اگر سیگنال‌های ارسالی هم احتمال و هم انرژی باشند، داریم $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_M$ و $\{\beta_m\}_{m=1}^{M}$ در ماکزیمم سازی بی تاثیر خواهند بود. در این حالت گیرنده‌ی بهینه، $\underline{s}_m$ ای را به عنوان سیگنال

ارسالی را بازیابی می کند که بیشترین همبستگی را با بردار $\underline{r}$ داشته باشد

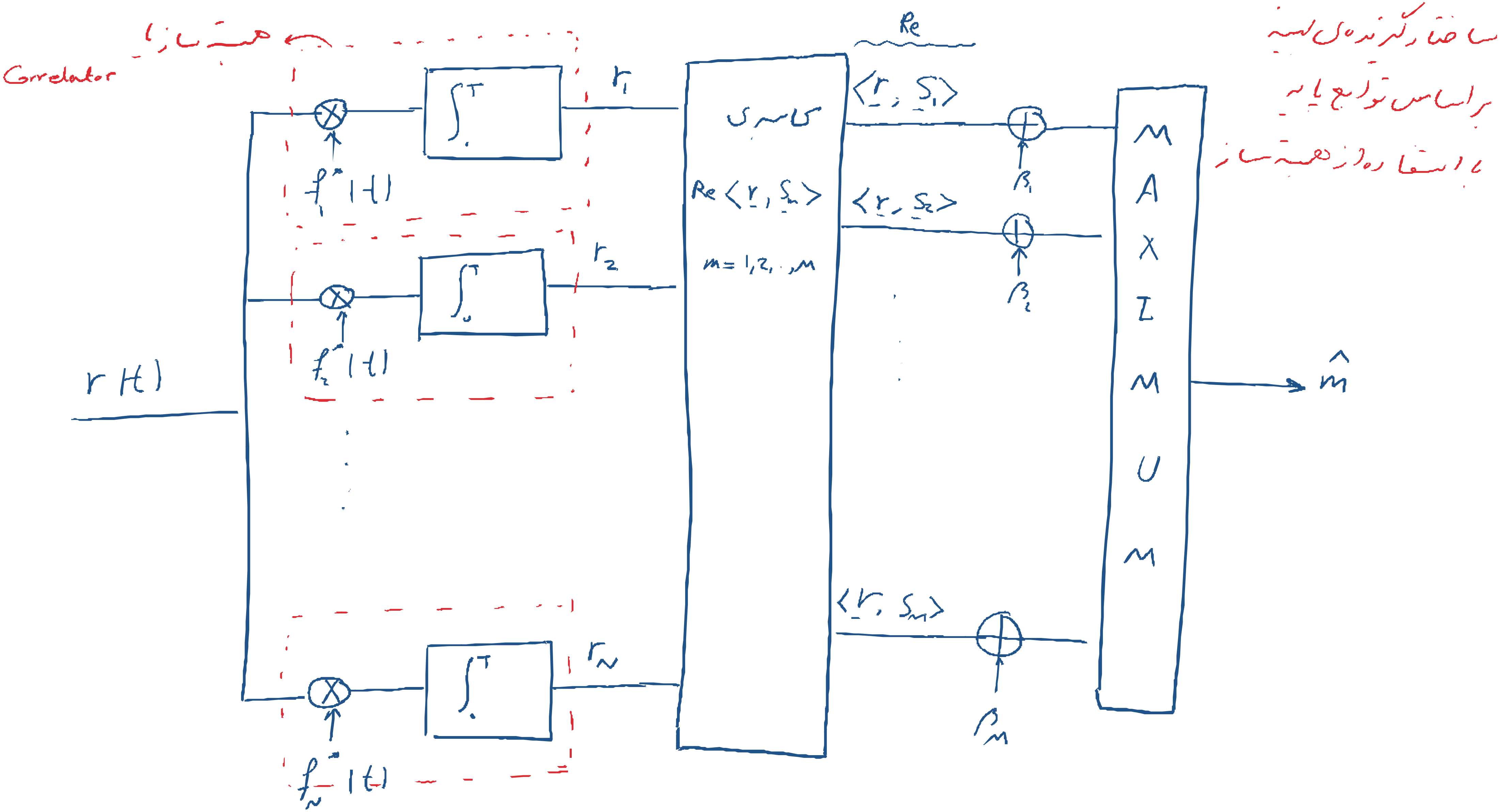
$$CM(\underline{r}, \underline{s}_m) = Re\{\langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle\}$$

به این ترتیب می توانیم ساختار گیرنده ی بهینه را برای پیاده سازی به دست بیاوریم.

براساس قانون تصمیم گیری

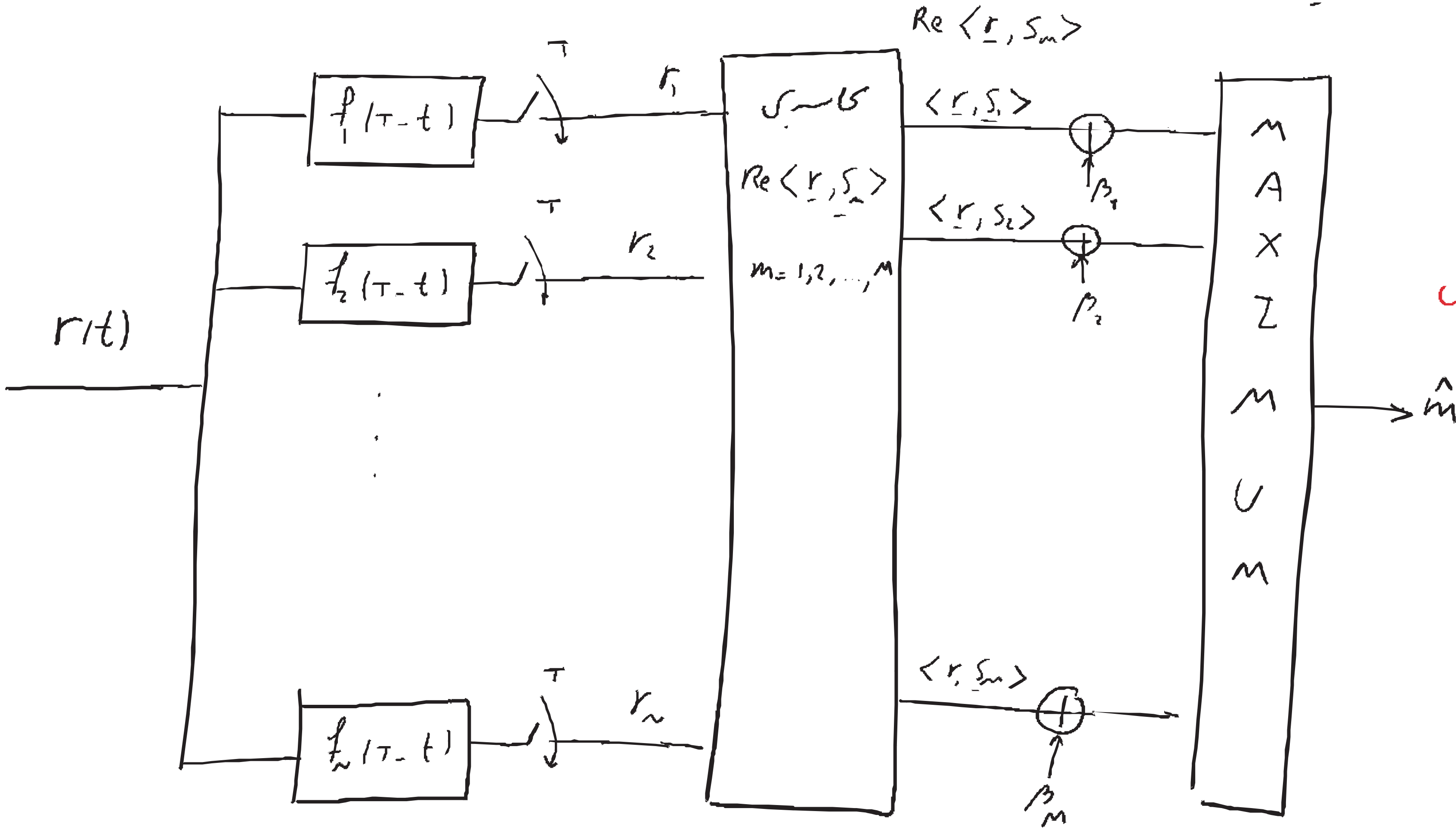
$$\hat{m} = \text{Arg Max}\{Re\{\langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle\} + \beta_m\}$$

اولین ساختار قابل پیاده سازی برای گیرنده ی بهینه در حالت AWGN به صورت زیر خواهد بود.



همبسته ساز
Correlator
$r(t)$
$f_1^*(t)$
$f_2^*(t)$
$f_N^*(t)$
$\int_0^T$
r_1
r_2
r_N
Re
$Re\langle \underline{r}, \underline{S}_m \rangle$
$m = 1, 2, \ldots, M$
$\langle \underline{r}, \underline{S}_1 \rangle$
$\langle \underline{r}, \underline{S}_2 \rangle$
$\langle \underline{r}, \underline{S}_M \rangle$
β_1
β_2
β_M
MAXIMUM
$\hat{m}$
ساختار گیرنده بهینه
بر اساس توابع پایه
با استفاده از همبسته ساز

با توجه به اینکه هر ساختار همبسته ساز، معادل یک فیلتر منطبق است که از خروجی آن در بازه‌های زمانی سمبل نمونه برداری می‌شود، می‌توان ساختار گیرنده‌ی بهینه را با استفاده از فیلتر منطبق نیز پیاده‌سازی کرد.



ساختار گیرنده‌ی بهینه
بر اساس توابع پایه
با استفاده از فیلتر منطبق

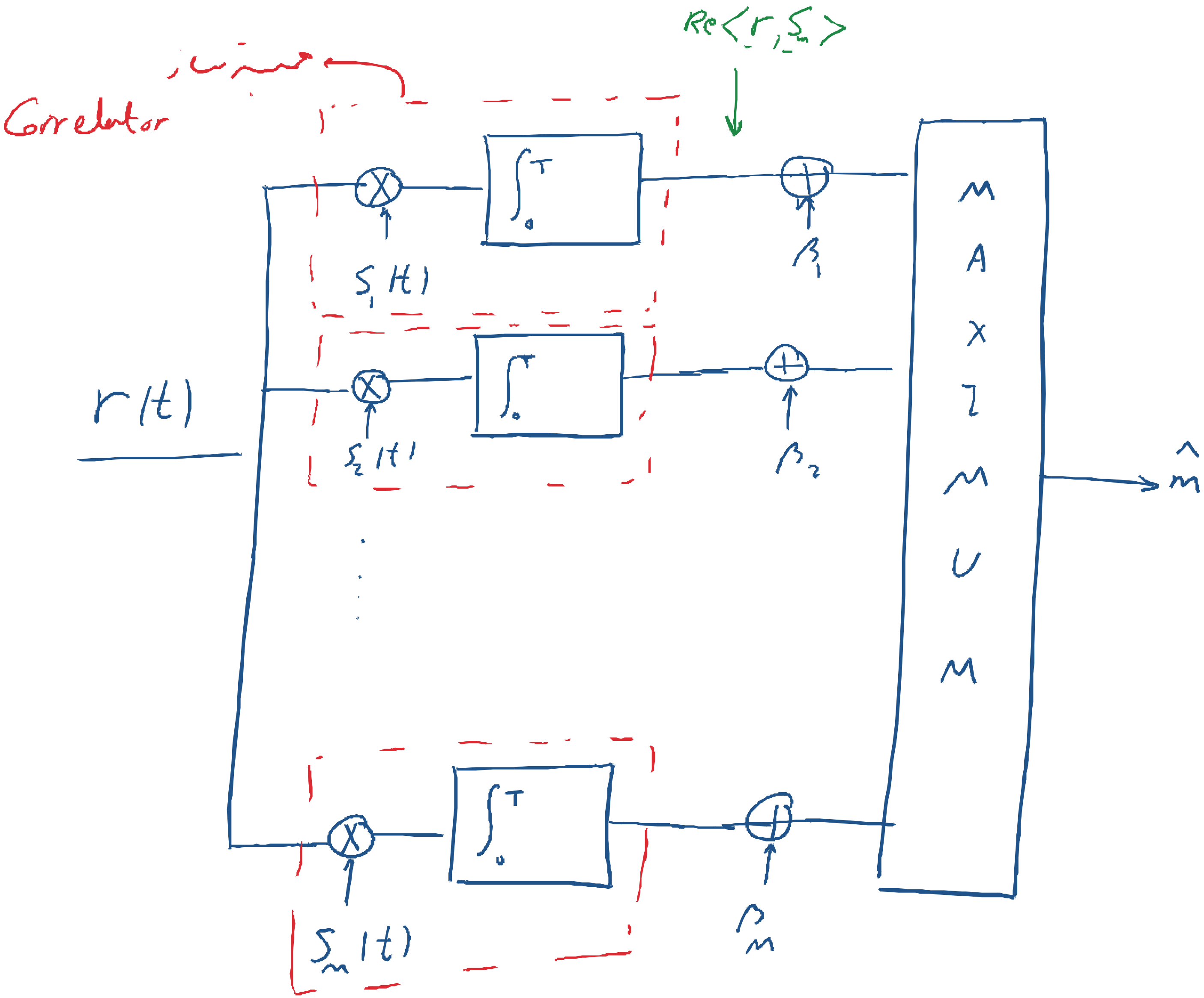
قانون تصمیم‌گیری گیرنده‌ی بهینه به صورت زیر است،

$$\hat{m} = \text{Arg Max} \left\{ Re \langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle + \beta_m \right\}$$

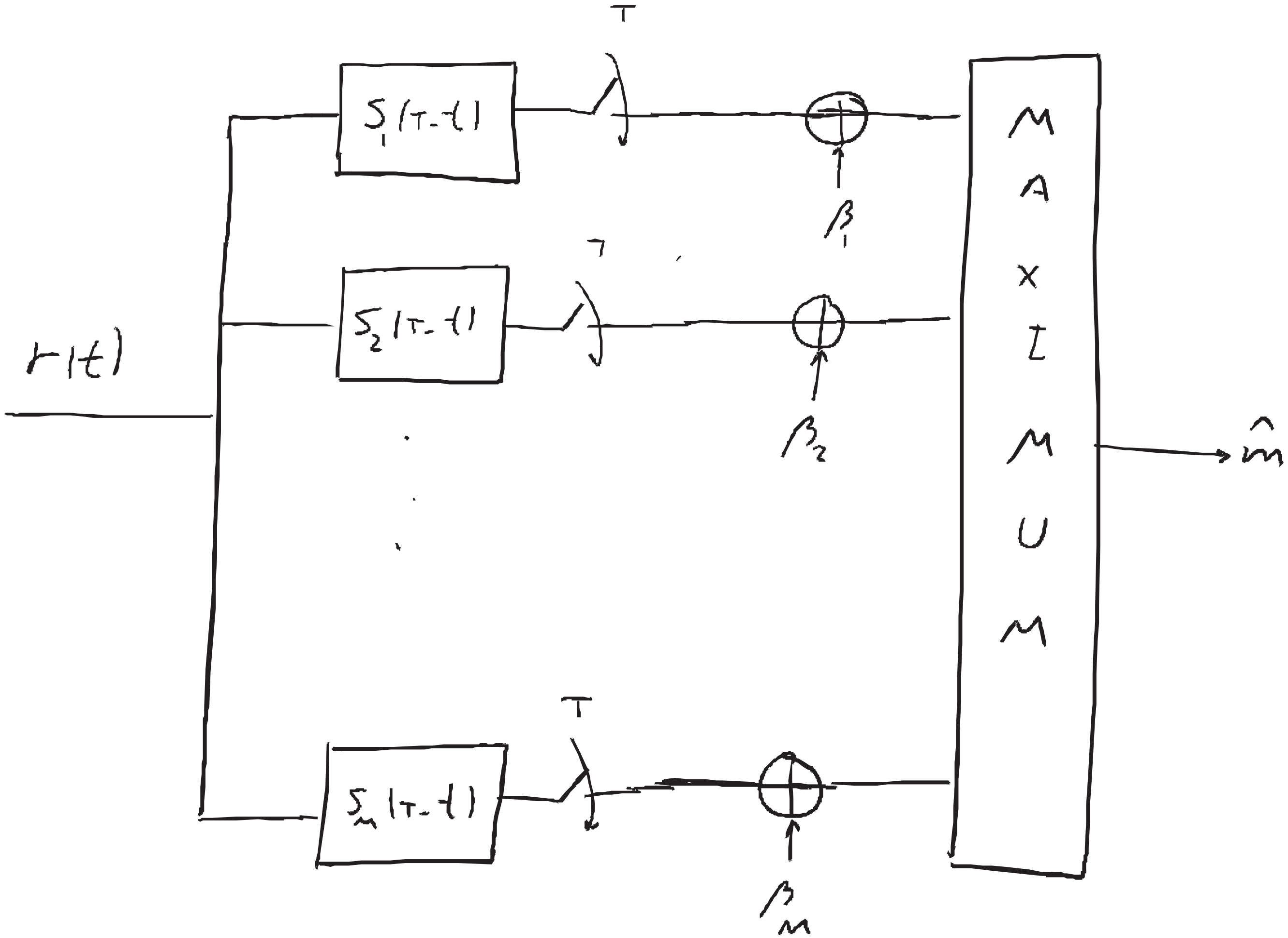
از طرف دیگر، می‌دانیم که

$$Re \langle \underline{r}, \underline{s}_m \rangle \underset{\text{فضای سیگنال}}{\equiv} \overbrace{\int_0^T r(t)\, s_m(t)\, dt}^{\text{همبستگی سیگنال‌های } s_m(t), r(t)} \underset{\text{معادل پایین‌گذر}}{\equiv} \frac{1}{2} Re \left\{ \int_0^T r_\ell(t)\, s_{m\ell}^*(t)\, dt \right\}$$

به این ترتیب، با کار کردن در فضای سیگنال، می‌توان ساختارهای معادل زیر را نیز برای گیرنده‌ی بهینه در نظر گرفت.



ساختار گیرنده‌ی بهینه
بر اساس سیگنال‌های ارسالی
با استفاده از همبسته ساز



ساختار گیرنده‌ی بهینه
بر اساس شکل‌های ارسالی
با استفاده از فیلتر منطبق

* به این ترتیب در حضور نویز جمع شونده‌ی سفید گوسی (AWGN) توانستیم چهار ساختار معادل برای گیرنده‌ی بهینه به دست بیاوریم.

* با توجه به اینکه در اغلب در پیچیدگی پیاده سازی این ساختارها، هسته‌ساز ها عملیات منطقی است. ساختاری کمترین پیچیدگی را دارد که کمترین تعداد هسته‌ساز ها عملیات منطقی را داشته باشد.

اگر پیاده سازی بر اساس توابع پایه انجام دهیم به تعداد N هسته‌ساز ها عملیات منطقی نیاز داریم. اگر پیاده سازی بر اساس سیگنال‌های ارسالی انجام دهیم به تعداد M هسته‌ساز ها عملیات منطقی نیاز داریم.

به عنوان مثال برای گیرنده‌ی 16QAM اگر پیاده سازی بر اساس توابع پایه باشد به دو عملیات منطقی با هسته‌ساز نیاز داریم. اگر پیاده سازی بر اساس سیگنال‌های ارسالی باشد به 16 عملیات منطقی با هسته‌ساز نیاز داریم.

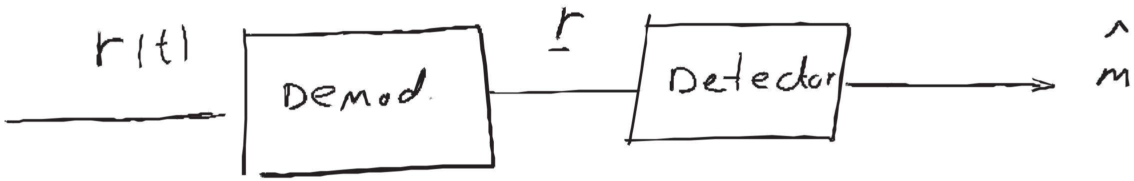
* ساختارهایی که به دست آوردیم، برای حالتی است که نویز جمع‌شونده، سفید گوسی باشد. در صورتی که نویز جمع‌شونده (سفید) غیرگوسی باشد، لازم است که مراحل انجام شده در قسمت‌های قبل را با توجه به توصیف آماری نویز ($P_n(n)$) انجام دهیم یعنی ($P(z|s_m)$) را به دست بیاوریم و قانون تصمیم‌گیری را ساده کنیم تا به ساختار گیرنده‌ی بهینه برسیم.

* اگر نویز جمع‌شونده، سفید نباشد، می‌توانیم از یک فیلتر سفیدکننده در ورودی گیرنده استفاده کنیم و نویز را سفید کنیم و سپس به طراحی گیرنده‌ی بهینه بپردازیم.

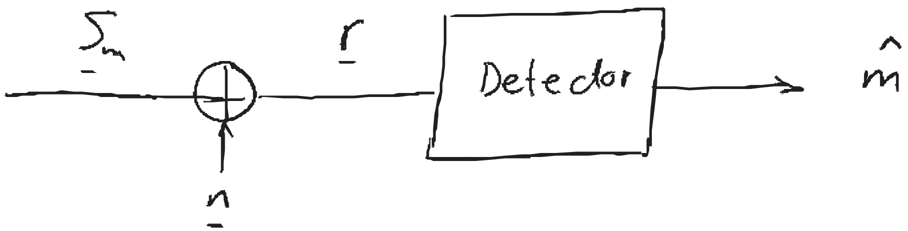
این موضوع را تحت عنوان پیش‌پردازش در گیرنده با هم بررسی می‌کنیم.

پیش پردازش درگیرنده

ساختار کلی گیرنده

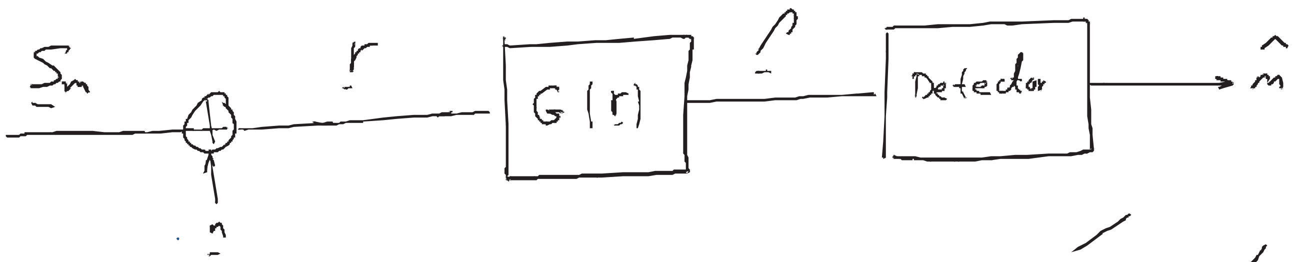


- شکل برداری



$P(\underline{r}|\underline{s}_m)$

در حالت کلی، آشکارسازی براساس $P(\underline{r}|\underline{s}_m)$ انجام می‌شود.



در بعضی موارد لازم است که قبل از آشکارسازی یک عملیات پیش پردازش مانند $G(.)$ بر روی بردار دریافتی اعمال شود. به عنوان مثال فیلتر سفیدکننده‌ی نویز، لازم است در ورودی گیرنده اعمال شود. این عملیات پیش پردازش در بیشتر موارد معکوس پذیر هستند. می خواهیم بدانیم که انجام یک پیش پردازش معکوس پذیر $G(.)$ بر روی بردار دریافتی $\underline{r}$، چه تاثیری بر ساختار گیرنده‌ی بهینه دارد؟

در این حالت گیرنده‌ی بهینه برای اینکه هیچ اطلاعاتی را در مورد $\underline{s}_m$ از دست ندهد، تصمیم گیری را براساس تابع چگالی احتمال $P(\underline{r}, \underline{\rho} \mid \underline{s}_m)$ انجام می دهد.

از طرف دیگر می‌دانیم که

$$P(\underline{r},\underline{\rho}\,|\,\underline{S}_m) \underset{\text{قانون زنجیره‌ای}}{=} \overbrace{P(\underline{r}\,|\,\underline{\rho},\underline{S}_m)}^{\text{یک مقدار مشخص}}\,P(\underline{\rho}\,|\,\underline{S}_m) \equiv P(\underline{\rho}\,|\,\underline{S}_m)$$

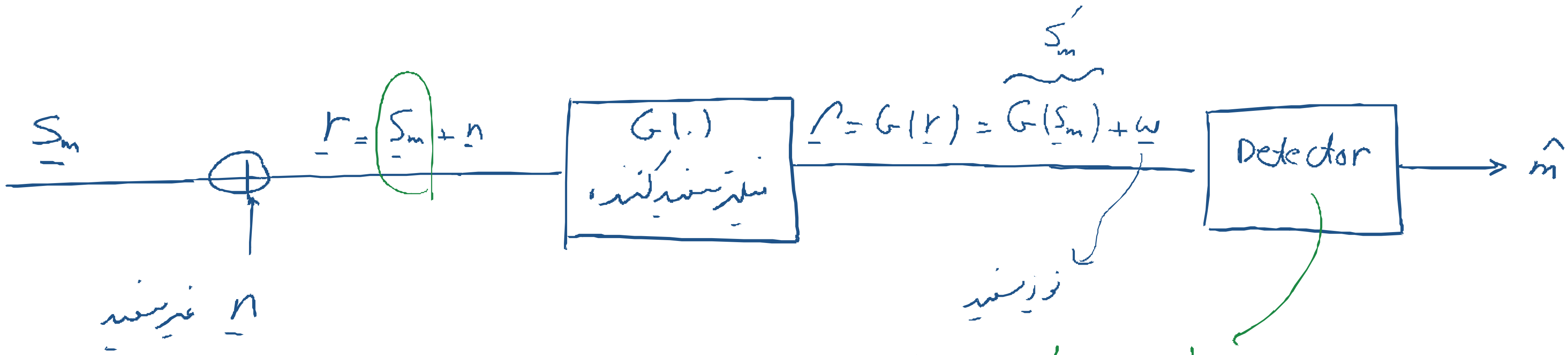
با معلوم بودن $\underline{\rho}$ ، $\underline{r}$ به طور کامل مشخص است $\underline{\rho}=G(\underline{r})$ یا $\underline{r}=G^{-1}(\underline{\rho})$

$$P(\underline{r},\underline{\rho}\,|\,\underline{S}_m) = P(\underline{\rho}\,|\,\underline{r},\underline{S}_m)\,P(\underline{r}\,|\,\underline{S}_m) \equiv P(\underline{r}\,|\,\underline{S}_m)$$

با معلوم بودن $\underline{r}$ ، $\underline{\rho}$ به طور کامل مشخص است

بنابراین فرقی ندارد که آشکارسازی را براساس مشاهدات $\underline{r}$ انجام دهیم یا براساس مشاهدات $\underline{\rho}$. یعنی چه براساس $P(\underline{r}|\underline{S}_m)$ تصمیم‌گیری کنیم و چه براساس $P(\underline{\rho}|\underline{S}_m)$ تصمیم‌گیری کنیم، هیچ اطلاعاتی در مورد $\underline{S}_m$ از دست نداده‌ایم و ساختار گیرنده‌ی بهینه یکسان خواهد بود.

به عنوان مثال در مورد نویز غیرسفید $\underline{n}$ ، از یک فیلتر سفیدکننده در گیرنده استفاده می کنیم



براساس $\underline{S}'_m$ طراحی انجام می شود و هیچ اطلاعاتی در مورد $\underline{S}_m$ از دست نخواهد رفت

لینک کلاس ضبط شده پنج شنبه ۹۹/۲/۲۵

https://lms۶srbiau.ac.ir/pxfy.۴ospftdd/?OWASP_CSRFTOKEN=۹۱۹۱۵۰۲a۹۰be۶ccd۴d۷۵a۸۹۴۱a۹۵۱۴e۰۹۶fef۴b۰daeeb۴۴d۲a۰۵f۶۹۸۱c۵۹a۸۹e